Διατακτικοί Αριθμοί
(Ordinals)

Έστω (E,R) καλά διατεταγμένο. Δημιουργώ την παρακάτω ακολουθία

$a_1 = \min E$

$a_2 = \min E \setminus \{a_1\}$

$a_3 = \min E \setminus \{a_1, a_2\}$

Ας είναι τώρα το σύνολο $A = \left\{ \frac{\nu}{\nu+1} \middle| \nu \in \mathbb{N} \right\} \cup \{1\}$

$a_1 = \frac{1}{2}$

$a_2 = \frac{2}{3}$

$a_3 = \frac{3}{4}$

Το 1 όμως δεν ~~εξαντλείται~~ υπάρχει στην ακολουθία άρα το A δεν εξαντλείται.

Αξίωμα Κανονικότητας: Έστω κλάση $X \neq \emptyset$, τότε $\exists x \in X$ ώστε $X \cap x = \emptyset$

Άρα $\forall X$ σύνολο ισχύει ότι $X \notin X$

Θεωρούμε το $\{X\}$. Προφανώς $X \in \{X\}$. Αν $X \in X$. Τότε $X \in X \cap \{X\} \neq \emptyset$

Άτοπο λόγω αξιώματος

Άρα $\forall x \in V \Rightarrow x \notin x \Rightarrow V \subseteq Russel$. Όμως $Russel \subseteq V$

$\Rightarrow V = Russel$

Ορισμός: Μια κλάση X θα λέγεται διατακτική (ordinal) αν και μόνο αν (i) Η σχέση εγκλεισμού (διάταξης) αποτελεί καλή διάταξη στην X (όπου σχέση διάταξης η

$$x \leq y \Leftrightarrow \begin{cases} x \in y \\ \text{ή} \\ x = y \end{cases}$$

~~Απο~~

(ii) $\forall x \in X$ έχουμε $x \subseteq X$

Αν μια διατακτική κλάση είναι σύνολο τότε καλείται διατακτικός αριθμός.

Συμβολισμός: On = η κλάση όλων των διατακτικών αριθμών.

Παράδειγμα: $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = 3$

Το παράδειγμα μας λέει ότι το κενό περιέχεται σε κάθε ordinal

Θεώρημα 1: Αν X και Y ordinal και $\exists\ \varphi:(X,E/X) \to (Y,E/Y)$

τότε $X=Y$

Απόδειξη: Θεωρώ την κλάση: $A=\{x\in X \mid \varphi(x)=x\}$

Αρκεί να δείξω ότι $A=X$

Προς απαγωγή σε άτοπο, έστω $A\neq X$ και αφού $A\subseteq X$. Τότε $X\setminus A\neq\emptyset$. Τότε $X\setminus A\subseteq X$. Και αφού X καλά διατεταγμένο τότε $\exists u\in X\setminus A \Rightarrow u=\min X\setminus A$.

Άρα $\varphi(u)\neq u \Rightarrow \forall x\in u$ θα έχουμε $x\notin X\setminus A\Rightarrow x\in A$

Άρα $\varphi(x)=x$. Θα δείξω ότι $\varphi(u)=u$

• Έστω $x\in u$. Τότε $\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varphi(x)\in\varphi(u),\ \varphi: \text{ισομορφισμός διάταξης} \\ \varphi(x)=x \end{array}\right.$

Άρα $x\in\varphi(u)\Rightarrow u\subseteq\varphi(u)$

• Έστω $\underbrace{x\in\varphi(u)}_{\substack{\varphi(u)\in Y \\ Y \text{ ordinal}}} \Rightarrow \varphi(u)\subseteq Y \Rightarrow x\in Y \xRightarrow{\varphi\ \text{επί}} \exists v\in X: \varphi(v)=x$

Άρα έχουμε $x\in\varphi(u)\Rightarrow\varphi(v)\in\varphi(u)\Rightarrow v\in u\Rightarrow v\in A\Rightarrow\varphi(v)\in A$.
$\Rightarrow\varphi(v)=v \Rightarrow v=x\Rightarrow x\in u$. Άρα $\varphi(u)\subseteq u$

Θεώρημα

Αν X ordinal και αν $x \in X$ τότε x διατακτικός αριθμός και $x = S^{(X)}_{x, E|X}$

Απόδειξη:

- $x \in X \xRightarrow{X \text{ ordinal}} x \subseteq X$
- Αφού $E|X$ καλή διάταξη στη X θα είναι και καλή διάταξη στο x.

Ας είναι $u \in x$, αφού $x \in X \xRightarrow{u \in x} u \in X \xRightarrow{X \text{ ordinal}} u \subseteq X$

Θδο $u \subseteq x$. Έστω $v \in u \xRightarrow{u \subseteq X} v \in X$. Έχουμε ότι $x, u, v \in X$ με $u \in x$ και $v \in u \xRightarrow{\text{μεταβατική}} v \in x \Rightarrow u \subseteq x$.

Άρα x ordinal

Έστω $y \in S^{(x)}_{X, E|X} \Rightarrow y \in X \cap y \neq x \Rightarrow y \in x \Rightarrow S^{(x)}_{X, E|X} \subseteq x$

Αν $y \in x \xRightarrow{x \subset X} y \in X \Rightarrow y \in S^{(x)}_{X, E|X}$. Άρα $x = S^{(x)}_{X, E|X}$

Θεώρημα: Η On είναι ordinal

Συνέπεια 1: Η On είναι γνήσια κλάση

Συνέπεια 2: $\forall a$ διατακτικός αριθμός έχουμε $a = S^{(a)}_{On, E|On}$

Ορισμός: Ας είναι β ένας διατακτικός αριθμός τότε ο διάδοχος του β ορίζεται ως $\beta^+ = \beta \cup \{\beta\}$

Ιδιότητες: (i) $\forall$ διατακτικό α ισχύει ότι $\bigcup \alpha^+ = \alpha$

(ii) Αν β ordinal τότε β^+ ordinal

Ορισμός: Ένας διατακτικός αριθμός α καλείται οριακός διατακτικός αριθμός αν $\alpha \neq \emptyset$ και δεν υπάρχει β διατακτικός ώστε $\alpha = \beta^+$

Ένας διατακτικός αριθμός α καλείται μη-οριακός διατακτικός αριθμός αν είναι κενός ή $\exists$ διατακτικός αριθμός ώστε $\alpha = \beta^+$.

Ασκηση 95: Ας είναι α μη-κενός, α ordinal.

Να δειχθεί ότι αν α οριακός ordinal $\Longleftrightarrow \forall \beta \in \alpha \Longrightarrow \beta^+ \in \alpha$

Λύση: Έστω α οριακός διατακτικός αριθμός. Ας είναι $\beta \in \alpha$. Αφού β διατακτικός $\Longrightarrow \beta^+$ διατακτικός. Άρα $\alpha, \beta^+ \in On$ και $E|On$ καλή διάταξη. Θα έχουμε: (i) $\beta^+ \in \alpha$ (ii) $\beta^+ = \alpha$ (iii) $\alpha \in \beta^+$. Η (ii) απορρίπτεται αφού α οριακός δ.α.

iii) Απορρίπτεται διότι αν $\alpha \in \beta^+ \Rightarrow \alpha \in \beta$ ή $\alpha = \beta$

Το $\alpha \in \beta$ απορρίπτεται αφού $\beta \in \alpha$

Επίσης το $\alpha = \beta$ Απορρίπτεται αφού έχουμε ότι

$\beta \in \alpha \Rightarrow \beta \in \beta$ (άτοπο λόγω αξιώματος)

Άρα, ισχύει μόνο η (i)

Έστω τώρα $\forall \beta \in A \Rightarrow \beta^+ \in \alpha$.

Ας είναι α ένας μη-κενός διατακτικός αριθμός

με $\alpha = \gamma^+ = \gamma \cup \{\gamma\}$. Άρα $\gamma \in \alpha$ αλλά $\gamma^+ \notin \alpha$ (Άτοπο)

από υπόθεση. Άρα α Ο.Δ.Α.

Θεώρημα: Για κάθε καλά διατεταγμένο σύνολο (X,R) υπάρχει ένας μοναδικός διατακτικός αριθμός α τέτοιος ώστε $(\alpha, E|\alpha)$ να είναι ισόμορφο με το (X,R)

Απόδειξη: Για το καλά διατεταγμένο σύνολο (X,R) και την κλάση On καλά διατεταγμένη από $E|On$.

Υπάρχουν 3 περιπτώσεις: (i) Υπάρχει μοναδικός ισομορφισμός από το X στην On.

(ii) Υπάρχει μοναδικός ισομορφισμός από το X σε ένα αρχικό τμήμα της On